Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 503885 04 novembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	a
3	c
4	d
5	a
6	d
7	d
8	b
9	c
10	d

1. La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

(a) è limitata inferiormente ma non superiormente ► (b) è limitata

(c) non è limitata né superiormente né inferiormente (d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Ricordiamo che $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$ per $t \to 0$. Quindi

$$\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2} = \left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2} = x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

per $x \to +\infty$.

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{x} = 0.$$

Dato che f è continua, dal teorema di Weierstrass generalizzato, f è limitata.

2. La derivata della funzione $f(x) = (\sin x)^{\sin^2 x}$ è

► (a) $(\sin x)^{\sin^2 x} \cos x \sin x\,(2\log(\sin x)+1)$ (b) $(\sin x)^{(\sin^2 x)-1}\log(\sin x)$

(c) $(\sin x)^{\sin^2 x}\cos x$ (d) $(\cos x)^{2\sin x\cos x}$

Soluzione:

$$f(x) = (\sin x)^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x \cdot \log(\sin x)}$$

$$f' = e^{\sin^2 x \log(\sin x)} \cdot \left(2\sin x\cos x \cdot \log(\sin x) + \sin^{\cancel{2}} x \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot \cos x\right) =$$

$$= (\sin x)^{\sin^2 x} \sin x\cos x\,(2\log(\sin x)+1)$$

3. $\int_0^2 1 - |x-1|\,dx =$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 0 ► (c) 1 (d) 2

Soluzione:

Osserviamo che $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$, quindi

$$\int_0^2 1-|x-1|\,dx = \int_0^1 1-(1-x)\,dx + \int_1^2 1-(x-1)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2-x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - 0 + \left(4 - \frac{4}{2} - \left(2-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \left(\cancel{4} \cancel{-2} \cancel{-2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x^2+3}\,dx =$

(a) $\left(\dfrac{1-\log 2}{2}\right)\log 3 + \dfrac{\pi}{4\log 3}$

(b) $\dfrac{\log 6}{2} + \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\log 3}{2}$

(c) $\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{\pi}{9}$

► (d) $\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva

$$\int \frac{1+x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3| + \int \frac{1}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+3| + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

Calcoliamo il secondo integrale con la sostituzione

$$t = \frac{x}{\sqrt{3}} \qquad dx = \sqrt{3}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \int \frac{\sqrt{3}\,dt}{t^2+1} = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\, t + c = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

Quindi

$$\int \frac{1+x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+3| + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x^2+3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(3+3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{2}\log 3 + \cancel{\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\, 0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log 6 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\, 1 - \frac{1}{2}\log 3 = \frac{1}{2}(\log 3 + \log 2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 3$$

$$= \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

5. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se

► (a) $\alpha < 1$ (b) $\alpha < \frac{3}{2}$ (c) $\alpha > \frac{2}{3}$ (d) $\alpha > 3$

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}\,dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}$ e osserviamo che f è continua in $(0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Vediamo l'andamento di f per $x \to 0^+$.

Se $\alpha \leq 0$ f è continua anche in $x=0$, quindi l'integrale converge.

Se $\alpha > 0$, utilizzando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$ con $t = x^2$, otteniamo

$$f(x) = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)} = \frac{1+o(1)}{x^{3\alpha-2}(1+x^3)} = \frac{1}{x^{3\alpha-2}} \cdot \frac{1+o(1)}{1+x^3}$$

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{3\alpha-2}}$ e otteniamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3\alpha-2}}\,dx$ converge $\iff 3\alpha - 2 < 1 \iff 3\alpha < 3$ $\iff \alpha < 1$, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

6. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\log x}$

(a) vale $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}$ (b) diverge positivamente (c) non esiste ► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$f(x) = \frac{1}{\log x} \qquad x \in [\tfrac{1}{2}, 1).$$

f ha segno costante. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{se } t \to 0.$$

Con la sostituzione $t = x-1$ otteniamo

$$\log x = x - 1 + o(x-1) \quad \text{per } x \to 1$$

Quindi $f(x) = \dfrac{1}{x-1+o(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} \; \dfrac{1}{1+o(1)}$.

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ottenendo

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dato che

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x-1}\,dx = -\infty$$

otteniamo, applicando il criterio del confronto asintotico, che

$$\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = -\infty.$$

7. La successione $a_n = \dfrac{1}{(-2)^n}$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha minimo ma non ha massimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

► (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$a_n = \frac{1}{(-2)^n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \to \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$$

Dato che $a_n > 0$ $\forall n$ pari, $a_n < 0$ $\forall n$ dispari, dalla versione per successioni del teorema di Weieristrass generalizzato, (a_n) ha sia massimo che minimo.

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n}\right)$

(a) converge assolutamente

► (b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge positivamente

(d) è indeterminata

Soluzione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-\frac{1}{n}\right)=\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0}\cos\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=-\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=-\left(\cancel{\sin(n\pi)}^{0}\cos\left(-\frac{1}{n}\right)+\cos(n\pi)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\cos(n\pi)\sin\frac{1}{n}=(-1)^n\sin\frac{1}{n}.$$

Ponendo $a_n=\sin\frac{1}{n}$, la serie diventa $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$.

La successione a_n è decrescente dato che è composizione della successione $\frac{1}{n}$ (decrescente) e della funzione $\sin t$ che per $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ è crescente.

Inoltre $a_n>0$ $\forall\, n\geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Dal criterio di Leibniz otteniamo che la serie converge.

Per la convergenza assoluta osserviamo che

$|(-1)^n a_n|=a_n=\sin\frac{1}{n}$.

Scegliendo $b_n=\frac{1}{n}$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Dato che $\sum b_n=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico, anche $\sum a_n=+\infty$, quindi la serie non converge assolutamente.

9. Quale dei seguenti vettori è ortogonale al vettore $\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$ ► (c) $\begin{pmatrix}-5\\20\\-8\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}$

Soluzione:

Moltiplichiamo scalarmente il vettore dato con gli altri 4.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix} = (-4)\cdot(-5) + 1 \cdot 20 + 5 \cdot (-8) = 20 + 20 - 40 = 0$$

i due vettori sono quindi ortogonali.

Per gli altri 3 vettori il prodotto scalare risulta diverso da $\emptyset$.

10. Il sostegno della curva $\gamma(t) = (\sin t, 1 + \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ è

(a) una sinusoide di lunghezza infinita

(b) un tratto limitato di sinusoide

(c) una retta

► (d) un segmento di retta di lunghezza $2\sqrt{2}$

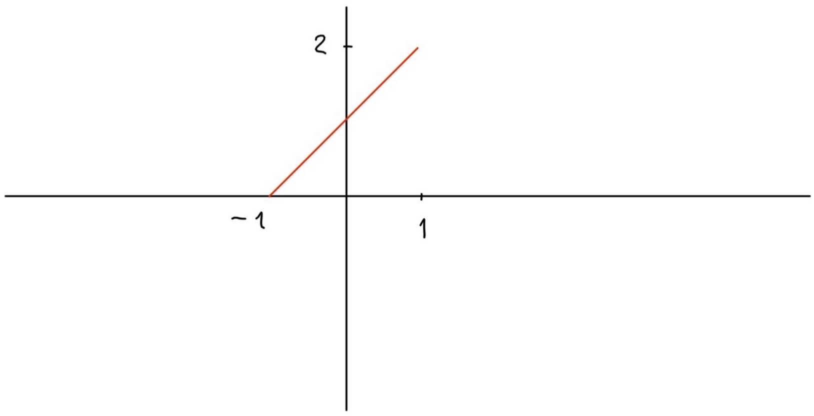
Soluzione:

$\gamma(t) = (\sin t, 1 + \sin t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$.

Le coordinate della curva sono $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = 1 + \sin t \end{cases}$

quindi, $\forall t \in \mathbb{R}$, risulta $y(t) = 1 + x(t)$. Avremo quindi che i punti del sostegno della curva γ soddisfano l'equazione $y = 1 + x$ che rappresenta una retta.

Osserviamo ora che, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \sin t \leq 1$ quindi $-1 \leq x(t) \leq 1$ e che $0 \leq 1 + \sin t \leq 2$, quindi $0 \leq y(t) \leq 2$. Ne segue che il sostegno della curva γ è il segmento della retta $y = 1 + x$ con $-1 \leq x \leq 1$



codice 503885	
1	b
2	a
3	c
4	d
5	a
6	d
7	d
8	b
9	c
10	d

Versione n. 75942121

1. b
2. a
3. c
4. d
5. a
6. d
7. d
8. b
9. c
10. d